

Bode 图上应用 Nyquist 判据判稳方法的讨论 TP 13

王维峰 李宝印 李强

(大连轻工业学院自动化系, 大连, 116034)

A

摘要 分析了以往教材、参考资料中论述的在 Bode 图上应用 Nyquist 判据判稳方法, 论证了以往的方法只适用于最小相位系统, 而非最小相位系统不适用, 从而提出了改进含有积分环节的相频特性增补曲线及正负穿越的方法。

关键词 频率法; Bode 图; Nyquist 判据; 最小相位; 正、负穿越
中图分类号 TP 273

自动控制

工程上普遍使用频率法进行自动控制系统的分析和设计, 而用频率法进行系统分析、设计时, 首先得判定系统的稳定性, 然后才能进行稳态、动态性能的分析。对闭环系统判稳就要使用 Nyquist 判据, 而 Nyquist 判据是在极坐标图上得出的结论。众所周知, 由于绘奈氏曲线很不方便, 特别是当系统的参数变化时更麻烦, 因此, 工程人员通常采用 Bode 图法进行系统的分析和设计, 这就需要在 Bode 图上应用 Nyquist 判据。

1 以往 Bode 图上应用 Nyquist 判据判稳方法存在的问题

根据极坐标图和 Bode 的对应关系, 可以将 Nyquist 判据应用到 Bode 图上。有关的资料这样论述^[1]: 闭环系统稳定的充要条件是: 在 Bode 图中, 在对数幅频特性

$$L(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)H(j\omega)| > 0 \text{dB}$$

的频段内, 相频特性 $\varphi(\omega) = \angle G(j\omega)H(j\omega)$ 与 -180° 线的正、负穿越次数之差等于 $P/2$ 。这里, 将相频特性 $\varphi(\omega) = \angle G(j\omega)H(j\omega)$ 伴随着相角增加穿过 -180° 线称正穿越; 将相频特性 $\varphi(\omega) = \angle G(j\omega)H(j\omega)$ 伴随着相角减少穿过 -180° 线称为负穿越。用公式可以表示为:

$$Z = P - 2N$$

其中, Z 为闭环的右根数, $Z=0$ 系统稳定, $Z \neq 0$ 系统不稳定; P 为开环传函 $G(s)H(s)$ 的右极点数; $N = N_+ - N_-$ 为正、负穿越次数之差, 正穿越一次 $N_+ = 1$, 负穿越一次 $N_- = 1$ 。

当 $G(s)H(s)$ 包含串联积分环节时, 如 $G(s)H(s) = 1/s^\gamma \times G_1(s)$, 这里, $G_1(s)$ 不含积分环节, γ 为串联积分环节数目。则

$$\varphi(\omega) = \angle G(j\omega)H(j\omega) = -\gamma \times 90^\circ + \angle G_1(j\omega)$$

在 $\omega = 0^+ \sim \infty$ 的过程中, 由 $\varphi(\omega) = -\gamma \times 90^\circ$ (认为 $\angle G_1(j0^+) = 0^\circ$) 趋向 $\varphi(\infty) = -\gamma \times 90^\circ$

收稿日期: 1996-12-06
王维峰, 男, 1963年5月生, 讲师

+ $\angle G_1(j\infty)$ 。在这种情况下,应该补画上 $\varphi(\omega)$ 从 $\omega = 0^+$ 的 $\varphi(0^+) = -\gamma \times 90^\circ$ 到 $\omega = 0$ 处 (位于横轴的 $-\infty$ 处) 的 $\varphi(0) = 0^\circ$ 的延长线,从而取得增补相频特性。然后,再根据 P 值及在 $L(\omega) = 20\lg |G(j\omega)H(j\omega)| > 0dB$ 的频段内,增补相频特性对 -180° 线的正、负穿越次数之差 ($N = N_+ - N_-$) 来判断闭环系统的稳定性。

以上为 Bode 图上应用 Nyquist 判据判稳方法的论述。经分析不难发现,此法只适用于 $P = 0$ 的最小相位系统。因为,上面论述的过程中认为 $\angle G_1(j0^+) = 0^\circ$, 这只有在 $P = 0$ 的最小相位系统中成立,而在 $P \neq 0$ 的非最小相位系统中 $\angle G_1(j0^+) \neq 0^\circ$ 。

图 1 所示它的开环频率特性为:

$$G(j\omega) = K/(j\omega T - 1) \quad (K > 1)$$

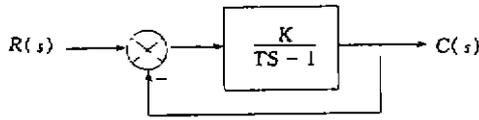


图 1 系统方块图

其极坐标图如图 1-1 所示根据 Nyquist 判据有: $RP=1$ $N=1$ $Z=P-N=0$ 系统稳定。而在 Bode 图上,如图 1-2 所示。

$$\begin{cases} L(\omega) = 20\lg K - 20\lg \sqrt{1 + (\omega T)^2} \\ \varphi(\omega) = -(180^\circ - \arctan \omega T) \end{cases}$$

按以往论述的方法,在 $L(\omega) > 0$ 的频段内, $\varphi(\omega)$ 无正、负穿越, $N=0$ $Z=P-2N=1$ $Z \neq 0$ 系统将不稳定,与极坐标图上的结果不符。

图 2 所示,已知: $G(S)H(S) = K(TS+1)/S \cdot (TS-1)$ ($K > 1$), 它的频率特性:

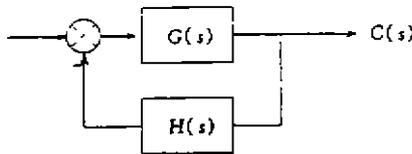


图 2 系统方块图

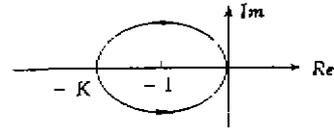


图 1-1 极坐标图

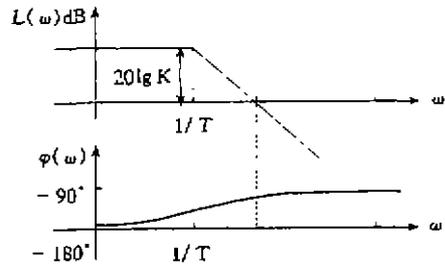


图 1-2 Bode 图

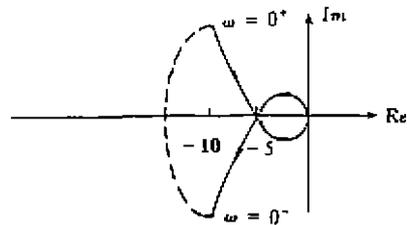


图 2-1 极坐标图

$$\begin{cases} G(j\omega)H(j\omega) = K(j\omega T + 1)/j\omega(j\omega T - 1) = -2K/(1 + (\omega T)^2) + jK(1 - (\omega T)^2)/\omega(1 + (\omega T)^2) \\ \varphi(\omega) = \arctan\omega T - 90^\circ - (180^\circ - \arctan\omega T) = -270^\circ + 2\arctan\omega T \end{cases}$$

其极坐标图如图 2-1 所示, 根据 Nyquist 判据有: $P=1$ $N=1$ $Z=P-N=0$ 系统稳定。而在 Bode 图上, 如图 2-2 所示, $L(\omega) = 20\lg |G(j\omega)H(j\omega)| = 20\lg K - 20\lg\omega T$, 由于含有一个积分环节, 相频特性需增补, 如图 2-2 $\varphi(\omega)$ 曲线 $\omega=0^+$ 到 $\omega=0$ 段。按以上论述在 $L(\omega) > 0$ 的频段内 $\varphi(\omega)$ 有一次正穿越 $N_+ = 1$, 有一次负穿越 $N_- = 1$ $N = N_+ - N_- = 0$ 而 $P=1$ $Z=P-2N=1-0=1$ 系统将不稳定, 与在极坐标图上所得的结论不符。显见, 以上在 Bode 图上应用 Nyquist 判据判稳的方法, 对于 $P \neq 0$ 的非最小相位系统是不适用的。

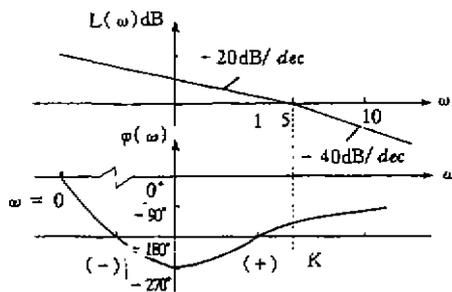


图 2-2 Bode 图

2 上述方法的改进

进一步分析以上两例, 不难发现, 由于 $P \neq 0$ 是非最小相位系统, 其相频特性为

$$\varphi(\omega) = -\gamma \times 90^\circ + \angle G_1(j\omega)$$

此时, $\angle G_1(j0) \neq 0^\circ$, 因此, 含有积分环节的增补相频特性就不能从 $\omega=0^+$ 时的 $-\gamma \times 90^\circ$ 增补到 $\omega=0$ 时的 0° , 应从 $\omega=0^+$ 时的相角

$$\varphi(0^+) = -\gamma \times 90^\circ + \angle G_1(j0^+)$$

向 $\omega=0$ (位于横轴的 $-\infty$ 处) 时的相角 $\varphi(0) = \angle G_1(j0)$ 处延长, 这样就可以解决 $\angle G_1(j0^+) \neq 0^\circ$ 的问题。

再一个问题是 $\varphi(\omega)$ 有从 -180° 线起始的情况, 即 $\varphi(0) = -180^\circ$, 以上两例属于这种情况, 因此, 正、负穿越也得进一步改进; 在 $L(\omega) > 0$ 的频段内, 将 $\varphi(\omega)$ 从 -180° 线开始随 ω 增大而相角增加, 定义为半次正穿越, 即 $N_+ = 1/2$; 在 $L(\omega) < 0$ 的频段内, 将 $\varphi(\omega)$ 从 -180° 线开始随着 ω 增大而相角减少, 定义为半次负穿越, 即 $N_- = -1/2$, 如图 3 所示。经这样处理后, Nyquist 判据在 Bode 图上, 对于 $P \neq 0$ 的非最小相位系统也能适用。

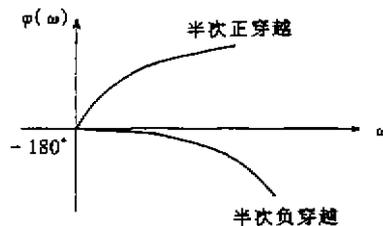


图 3 半次穿越图

以上图 1 系统 $\varphi(0) = -180^\circ$ 且 $\varphi(\omega)$ 向相角增加方向变化, 则 $N_+ = 1/2$ $N_- = 0$ $N = N_+ - N_- = 1/2$ $Z = P - 2N = 1 - 1 = 0$ 系统稳定, 与在极坐标图上所得的结论一样。

对于图 2 系统, 增补相频特性从

$$\varphi(0^+) = -90^\circ + \arctan\omega T - (180^\circ - \arctan\omega T) = -270^\circ$$

增补到 $\varphi(0) = \angle G(j0) = \arctan\omega T - (180^\circ - \arctan\omega T) = -180^\circ$

如图4所示, $\varphi(\omega)$ 从 -180° 开始相角减少 $N_- = 1/2$ 而 $N_+ = 1$ $N = N_+ - N_- = 1/2$ $Z = P - 2N = 1 - 1 = 0$ 系统稳定, 与在极坐标图上所得的结论一样。可见, 经改进的方法能适用于 $P \neq 0$ 的非最小相位系统, 从而弥补了以往的方法的局限性。

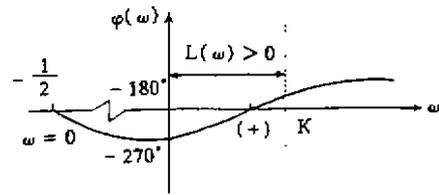


图4 图2的 $\varphi(\omega)$ 改进曲线图

3 结束语

对于以往的在 Bode 图上应用 Nyquist 判据的方法, 改进的地方有两个:

(1) 将含有串联积分环节的相频特性增补曲线改为从 $\omega = 0^+$ 时的 $\varphi(0^+) = -\gamma \times 90^\circ + \angle G_1(0^+)$ 增补到 $\omega = 0$ 时(横轴的 $-\infty$ 处)的 $\varphi(0) = -\angle G_1(j0)$ 处, 从而解决了 $\angle G_1(j0^+) \neq 0$ 的系统。

(2) 对正、负穿越加以改进, 将相频特性 $\varphi(\omega)$ 从 -180° 开始相角增加定义为半次正穿越 ($N_+ = 1/2$), 将相频特性 $\varphi(\omega)$ 从 -180° 开始相角减少定义半次负穿越 ($N_- = 1/2$), 则 $N = N_+ - N_-$ 。经以上两点改进就可以在 Bode 图上应用 Nyquist 判据 $Z = P - 2N$ 判断任何系统的稳定性。

参 考 文 献

- 1 李友善. 自动控制原理. 北京: 国防工业出版社, 1980. 202~209
- 2 夏德铃. 自动控制理论. 北京: 机械工业出版社, 1983. 147~156
- 3 侯夔龙. 自动控制理论. 西安: 西安交大出版社, 1987. 155~162

On Nyquist Criterion Used in Bode Plot Judging the Control System Stability

Wang Weifeng, Li Baoyin, Li Qiang

(Dept. of Automation, Dalian Inst. of Light Ind., Dalian, 116034)

Abstract It is demonstrated that the conventional method for Nyquist criterion in Bode plot, assessing the control system stability, can be used only in the minimum phase system. It is improved by the augmented curve of phase-frequency characteristics and positive and negative push-through method.

Key Words Bode Plot Nyquist Criterion; minimum phase system; positive and negative push through